LES MATHEMATIQUES EGYPTIENNES

Comparaison historique de l'émergence des Sciences entre Sumer (Mésopotamie) et l'Egypte.

On ne peut aborder les sciences égyptiennes sans rappeler que les sciences sumériennes (Mésopotamie) les ont précédées de 100 à 200 ans. Les migrations incessantes de la Mésopotamie vers l'Egypte, qui subissait des vagues successives de sécheresses, ont contribué au développement de l'écriture pictographique et à celui des sciences (Astrologie, astronomie, gnomon, clepsydre, polo, calendrier, zodiaque…) égyptiennes. Les Sumériens ont ensuite opté pour l'écriture cunéiforme, alors que les Egyptiens ont conservé jusqu'à la fin les pictogrammes, devenus hiéroglyphes, pour leur beauté picturale.

Sans conteste, la numérologie et les mathématiques sumériennes étaient beaucoup plus développées que les mathématiques égyptiennes, par leur capacité d'abstraction et leur faculté à manipuler les grands chiffres. Probablement parce que les Sumériens étaient un peuple de commerçants portés vers la compatibilité, alors que les Egyptiens étaient un peuple de paysans plus portés vers la géométrie, car ils devaient, après chaque inondation annuelle du Nil retracer les surfaces des champs des différents propriétaires.

Les Mésopotamiens furent, pour l'époque, de fantastiques découvreurs. Ils créèrent en premier lieu **le système décimal,** puis une **numération positionnelle** dans laquelle la valeur d'un chiffre dépend de sa position relative au sein du nombre écrit : ainsi dans 3 333, le 3 signifie soit unité, soit dizaine, centaine ou millier. Cette numération permet donc d'exprimer des grands nombres. Mais aussi, et cela au tout début des civilisations, une numération **sexagésimale** qui n'était pas utilisée par le peuple mais par les savants et les astronomes.
Cette numération, étonnante et originale, laisse leur valeur aux unités du premier rang, multiplie par 60 celles du second rang, par 60^2 (d'où invention des exposants !) celle du troisième rang et ainsi de suite.

Ainsi un nombre que les Sumériens écrivaient : **3 2 7** ne signifiait pas 327 mais :

$(3 \text{ X } 60^2) + (2 \text{ X } 60) + 7 = 10\,800 + 120 + 7 =$ soit 10 927

Il y avait cependant une lacune : le zéro. Absent jusqu'à l'époque Séleucide (Séleucos Ier, lieutenant d'Alexandre le Grand (-350). Pour compenser ils laissaient un vide en guise de zéro. Le déchiffrement était ambigu, en effet :
Pour 1 2   1 1 on peut aussi lire 1 2 **0** 1 1, ce qui ne donne pas le même résultat !

On comprend que le système décimal fut inventé en comptant sur les doigts de la main, mais le système sexagésimal ? Mystère… !
Pour la division, pour diviser l'entier m par n, ils cherchaient l'inverse de n et ils multipliaient par 1/n :
Ainsi pour 10/2 1/2 = 0,5 et 10 x 0,5 = 5

Ils possédaient aussi, pour le côté pratique des commerçants, **des tables de carrés, de cubes, de racines carrées et cubiques, de multiplications et de divisions.**

Pour l'**algèbre,** ils ne possédaient pas l'équivalent de nos x et y, mais, à l'aide de calculs combinatoires, ils furent capables de résoudre des équations du 1er ou du 2ème degré à une ou plusieurs inconnues !
Contrairement au Egyptiens, ils furent donc plus mathématiciens que géomètres et comme nous actuellement (sur un tableau noir) ils raisonnaient juste sur des figures fausses !
Pour le rapport du périmètre au diamètre d'un cercle, ils ont trouvé π = 3 et ont divisé le cercle en 360°. Ils étaient capables de calculer des surfaces et des volumes.
Bref, tout juste sorti de la préhistoire, ce peuple eut une créativité exceptionnelle, difficile à expliquer !!!

LA SCIENCE EGYPTIENNE

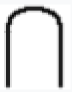
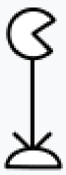
Ce sont les prêtres qui fondèrent la science égyptienne et, selon eux, elle aurait été l'œuvre de Thot le dieu de la sagesse. La science qu'ils développèrent le plus est la géométrie, car toute la vie égyptienne dépendait des crues du Nil qu'il fallait prévoir à l'aide de Nilomètres. Des arpenteurs et des scribes, accompagnés de soldats pour calmer les litiges, devaient, après chaque crue, recalculer les surfaces des terrains recouverts de limon en présence des différents propriétaires. D'où la nécessité de disposer de calculs géométriques les plus justes possibles. De tels calculs étaient aussi nécessaires pour leur merveilleuse architecture : temples, palais, pyramides … dont ils étaient si fiers et que tous les étrangers venaient admirer et tentaient souvent de copier, (comme les Grecs)…

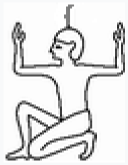
Les mathématiques et la numérologie ne furent pas leur point fort et furent vraisemblablement introduites par les Chaldéens. De nombreux « ingénieurs » mésopotamiens, tout au long de leur longue histoire, vinrent leur prêter main forte !

Ils utilisèrent le système décimal, ignorèrent le **0**, dans certains cas, ils laissaient un vide, car le zéro, par définition, ne représente rien.

La Numération

Chaque signe correspondant aux unités, dizaines, centaines…était répété autant de fois qu'il le fallait pour exprimer le nombre désiré. Les chiffres les plus élevés étaient écrits avant les autres. Les unités étaient représentées par un bâton droit, les dizaines par une anse de panier, les centaines par une corde enroulée ou une spirale ouverte, les milliers par la fleur de lotus, 10 000 par un pouce, 100 000 par un têtard et un million par un petit homme assis (dieu Heh), bras levés en signe d'allégresse, étonné qu'un tel chiffre puisse exister !

Valeur	Signe hiéroglyphique	Signe hiératique	Appellation	Transcription
1			bâton	*wʿ*
10			anse de panier	*mḏ*
100			corde enroulée	*šnt*
1 000			fleur de lotus	*ḫꜣ*
10 000			doigt	*ḏbꜣ*
100 000			têtard	*ḥfn*

1 000 000			Heh[1]	*Ḥḥ*

Les deux derniers signes du têtard et du dieu Heh peuvent également être utilisés pour signifier "un grand nombre" sans notion quantitative spécifique [1]

Ainsi le nombre 1 527 se note :

Il paraît évident qu'avec une telle numération compilatoire, compter était un vrai problème, car source de nombreuses erreurs lors des dénombrements de récoltes agricoles, de troupeaux, en astronomie…
Autre casse-tête le hiéroglyphe X de notre lettre de l'alphabet ou du signe multiplier, avait plusieurs lectures possibles : en effet il pouvait se lire « oupi », diviser ; « heseb », compter ; « djai », traverser ; « soua », passer ; « hedji », endommager ……….seul le contexte permettait de trancher !

Les fractions

Le hiéroglyphe en forme de bouche ouverte qui dans l'alphabet se prononce ® signifie *partie* et était utilisé pour représenter le numérateur 1 :

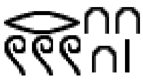
Les fractions étaient écrites avec ce hiéroglyphe (bouche) dessus et le dénominateur en dessous. Ainsi 1/3 était écrit :

 = 1/3

Il y avait des symboles spéciaux pour les fractions les plus courantes comme 1/2 et pour deux fractions non unitaires 2/3 et 3/4 :

 =1/2  = 2/3  = 3/4

Si le dénominateur devenait trop large, la « bouche » était placée juste au début du dénominateur :

 = 1/331

Les multiplications

Les Egyptiens ne multiplient et ne divisent que par 2. Pour multiplier un nombre supérieur à 2 : ils opéraient une série de duplications.

Ils n'avaient pas à se servir de leur mémoire ainsi pour effectuer 13 X 7.

Ils écrivaient dans la colonne de droite le multiplicateur, dans celle de gauche le chiffre 1. Le scribe double ainsi les nombres des deux colonnes jusqu'à ce qu'ils puissent obtenir par addition des nombres de gauche le montant du multiplicande. Ils marquent d'un trait le nombre obtenu et additionne les correspondants de la colonne de droite.

Donc pour multiplier, ils additionnent !

Ainsi : **13 X 7 = 91**

*1	7
2	14
*4	28
*8	56
13	**91**

La division se faisait de la même façon, mais en sens inverse.

Ainsi : 44/4 = 11

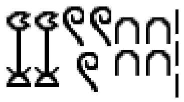
1	4*
2	8*
4	16
8	32*
11	

Ces procédés simples sont lents.

Contrairement à la Mésopotamie, ils n'avaient pas de tables !

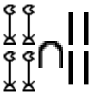
L'addition

Exemple : 2343 + 1671



\+

nous donne :

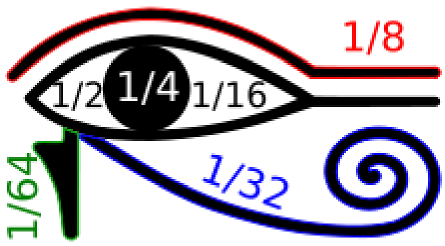


Finalement, le résultat est : 4014

Mesures de capacité de grains

Dans l'imagerie de l'Égypte antique, l'**Œil oudjat** est un symbole protecteur représentant l'Œil du dieu faucon Horus.

Au cours d'un combat, Seth arrache l'œil gauche d'Horus, le coupe en six morceaux et le jette dans le Nil. À l'aide d'un filet, Thot récupère les morceaux mais il en manque un ! Thot le rajoute et rend à Horus son intégrité vitale.
L'Œil oudjat avait une fonction magique liée à la prophylaxie, à la restauration de la complétude et à la vision de « l'invisible ».
Oudjat en égyptien veut dire "complet". Les parties constituantes de l'oudjat servaient à écrire les fractions ayant 64 comme dénominateur commun et servant à mesurer les capacités de grain :



Hiéroglyphe	Signification	Valeur
	partie de la conjonctive	1/2 (soit 32/64)
	pupille	1/4 (soit 16/64)
	sourcil	1/8 (soit 8/64)
	partie de la conjonctive	1/16 (soit 4/64)
	larme (?)	1/32 (soit 2/64)
	tâche du faucon (?)	1/64

L'addition des six fractions, 32/64 + 16/64 + 8/64 + 4/64 + 2/64 + 1/64, donne 63/64, la fraction manquante étant complétée par Thot. L'œil est ainsi reconstitué !

Cette notation était employée pour indiquer les fractions du boisseau, le *heqat*, mesure de capacité des céréales, valant environ 4,785 litres.

Exemple :

Orge *heqat* : 1/2 + 1/4 + 1/32 (25/32 boisseaux d'orge).

◭ 1 hequat = 1/30 de coudée cube de blé
◭ 1 henou = 1/10 d'hequat = 0.48 litre
◭ 1 ra = 1/320 d'hequat (pour la cuisine)
La bière et le pesou
◭ Le pesou donne la concentration de la bière (aussi qualité du pain)
◭ Si 1 heqat de blé était utilisé pour produire 5 henou de bière, on disait que cette bière avait un pesou égal à 5.
◭ Plus petit était le pesou, plus la bière était forte !

UNITES DE MESURE

CAPACITE	HEQUAT	4,5 litres
LONGUEUR	COUDEE	45/52 cm
	VERGE	100 coudées
	ITEROU (Schène grec)	20 000 coudées royales
SURFACE	AROURE	2735 m²
POIDS	DEBEN	91 grammes

◭ 1 paume = 1/7 de coudée ◭ 1 doigt = 1/4 de paume
◭ 5 doigts = 1 main = 1 poing

▲ 1 hayt = 1 khet = 100 coudées ▲ 1 coudée-remen = demi-longueur de la diagonale d'un carré de coté 1 coudée : utile pour mesure de terres.
▲ 1 aroure = 1 setat = surface d'un carré de coté 100 coudées.

Calcul d'une surface

Tous leurs calculs de surfaces étaient fondés sur celui de la surface du rectangle qu'ils ont exactement déterminée comme le produit de deux côtés adjacents.
Mais ils faisaient pareil pour tous les quadrilatères dont les côtés opposés étaient égaux. Ils ont reporté cette erreur sur le triangle : la surface d'un triangle est égale à la moitié du produit de la base par un des côtés. Ils n'ont jamais eu la notion de hauteur.

Les Egyptiens calculaient : S = B X b/2 au lieu de S = B X h/2

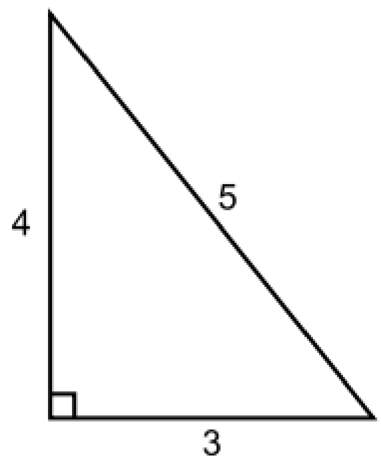
Si la réputation des scribes en matière de mathématiques est, d'ordre général, inférieure à celle des Babyloniens ou des Grecs, la géométrie, au regard des prouesses techniques réalisées très tôt dans leur histoire (temples, pyramides…), fut leur domaine de prédilection et il ne fait nul doute aujourd'hui que cette science associée à l'architecture, fit la grande réputation des Égyptiens. Cependant nous verrons plus loin, dans le chapitre sur l'architecture, que de nombreuses techniques restent pour le moins obscures !

Ce qui est certain, c'est que leur pays accueillit en pèlerinage des savants de tous les horizons et en particulier de la Grèce antique.

Les égyptiens réussirent à calculer la surface d'un disque, (voir ci-après) sans connaître le nombre pi, avec une erreur de seulement 0,6%. Ils calculaient la surface d'un cercle en élevant au carré les 8/9 du diamètre, ce qui revient à une approximation de pi égale à 3,1605 (au lieu de 3,1416). Ils pouvaient calculer les volumes de pyramides et de cylindres et l'aire d'une sphère. Certains problèmes figurant sur les papyri mathématiques du Moyen Empire préfigurent même les théorèmes de Thalès et de Pythagore.

Le triangle

Les Égyptiens de cette époque détenaient des connaissances relativement élaborées en géométrie, et en particulier dans l'étude des triangles.
Le triangle égyptien ou triangle 3-4-5
Un triangle dont les côtés sont en proportion 3-4-5 est rectangle, l'angle droit étant défini par les côtés 3 et 4. Cette propriété se démontre par la réciproque du théorème de Pythagore, du fait que $3^2 + 4^2 = 5^2$ (car 9 + 16 = 25).



Le triangle rectangle 3-4-5 est très anciennement connu : le triplet pythagoricien 3-4-5 est mentionné sur des tablettes babyloniennes et a été utilisé par les bâtisseurs de cathédrales jusqu'à nos jours.

Il est clairement attesté dans quatre des sections du papyrus Rhind : R57, R58, R59a et R59b, dans le calcul de la pente d'une pyramide.

L'aire d'un disque

Le calcul de l'aire d'un disque représente sans doute l'un des progrès les plus significatifs effectué en mathématiques par les anciens égyptiens. Il est également l'un des exercices qui a fait couler le plus d'encre, le nombre pi et la quadrature du cercle semblant intimement liés au problème. Le calcul de l'aire est ainsi traité dans les problèmes R41, R42, R43, R48 et R50 du papyrus Rhind et enfin le problème M10 du papyrus de Moscou.

Énoncé du problème R50 du papyrus Rhind12

« Exemple de calcul d'un champ rond de neuf khet. De combien est la surface du champ ? Soustrais son neuvième qui est un. Il reste huit. Multiplie huit par huit. Cela fait soixante-quatre. Ceci est la surface du champ, à savoir soixante-quatre setjat »

Résultat *: « La surface du champ est soixante-quatre setjat. »*

La formule appliquée par le scribe est donc clairement :
Aire = $(d - (1/9 * d)^2$, la formule moderne étant πr^2 ; d étant le diamètre du disque. L'énoncé évoque un champ rond de neuf khet, étant sous-entendu que neuf khet est le diamètre.

La plupart des auteurs attribuent aux anciens Égyptiens l'approximation de la valeur pi à 256/81 soit 3,1605, valeur remarquable pour l'époque. Sa valeur approchée par défaut est 3,141592653589793 en écriture décimale.

De nombreuses formules de physique, d'ingénierie et bien sûr de mathématiques, impliquent π, qui est une des constantes les plus importantes des mathématiques.

Le nombre π est irrationnel, c'est-à-dire qu'on ne peut pas l'exprimer comme un rapport de deux nombres entiers ; ceci entraîne que son écriture décimale n'est ni finie, ni périodique. Cependant, le problème R50 exposé ci-dessus ne prouve pas que les Égyptiens aient eu conscience de l'existence de cette constante. La seule certitude est qu'ils pouvaient calculer l'aire d'un disque à partir de son diamètre, et d'en donner une valeur approchée avec une grande précision en l'assimilant à un carré. La méthode employée pourrait bien trouver une explication dans une esquisse géométrique du problème R48 du papyrus Rhind14.

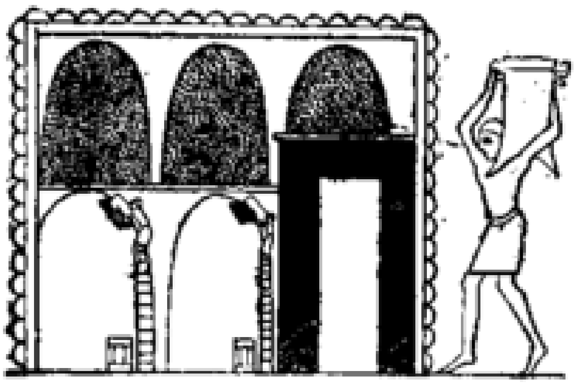
Calcul d'un volume

Volume d'un cube

Comme le montre le problème R44 du papyrus Rhind, la formule du volume d'un solide de forme cubique était connue des anciens Égyptiens.

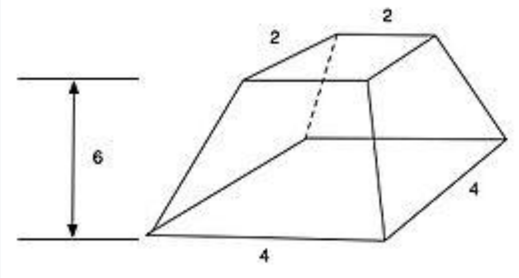
Énoncé du problème R44 du papyrus Rhind

« Exemple de calcul d'un grenier rectangulaire. Sa longueur est 10, sa largeur est 10 et sa hauteur est 10. Quel montant de grain cela fait-il ? Multiplie 10 par 10. Cela fait 100. Multiplie 100 par 10. Cela fait 1000. Prends la moitié de 1000, soit 500. Cela fait 1500. C'est sa quantité en khar. Prends 1/20 de 1500. Cela fait 75, sa quantité en quadruple-heqat, soit 7500 heqat de grain. »



Grenier à blé égyptien

Volume d'une pyramide tronquée.



Pyramide tronquée étudiée dans le problème 14 du papyrus de Moscou

Le problème M14 du papyrus de Moscou est remarquable en ce sens qu'il dévoile l'extraordinaire capacité des anciens Égyptiens à inventer et utiliser des méthodes de calcul complexes et d'une parfaite justesse.

Énoncé du problème M14 du papyrus de Moscou

> *« Méthode de calcul d'une pyramide tronquée. Si on te dit : Une pyramide de 6 pour la hauteur par 4 sur la base, par 2 sur le sommet. Calcule le carré de 4. Le résultat est 16. Prends le double de 4. Le résultat est 8. Prends le carré de 2. Le résultat est 4. Tu dois additionner le 16, le 8 et le 4. Le résultat est 28. Prends 1/3 de 6. Il vient 2. Prends 2 fois 28. Il vient 56. Le résultat est 56. Tu trouveras cela correct. »*

Cet énoncé décrit le calcul suivant :

$V = 1/3\ h\ (a^2 + ab + b^2)$ qui est la formule exacte d'une pyramide tronquée ! On ignore comment les Egyptiens ont développé cette formule. Le moyen mis en œuvre pour déterminer une méthode aussi complexe nous est inconnu !

Quand on étudie la géométrie de la grande pyramide, il est délicat de faire la distinction entre les intentions des constructeurs et les propriétés qui découlent des proportions de l'édifice. On mentionne souvent le nombre d'or φ et le nombre Pi présents dans les proportions de la pyramide : les Égyptiens ont, nous l'avons vu, choisi une pente pour les faces de 14/11.

Remarque sur le nombre d'or et Pi.

- Concernant le nombre d'Or [1], la proportion de 14/11 entraîne un rapport apothème/demi-base ce qui leur a permis de trouver la valeur de 1,61859 au lieu de 1,61803. Le nombre d'Or est le nombre réel positif, noté **φ,** égal

[1] En fait, c'est le mathématicien italien Leonardo Pisano, dit Fibonacci, né en 1175, qui est parvenu à élaborer une suite, que l'on appelle communément la suite de Fibonacci. Elle repose sur le fait de diviser un terme par le précédent, chaque nouveau résultat s'approchant de plus en plus… du nombre d'or.
Ce nombre est tel que les additions successives pour réaliser la suite, vont engendrer une suite particulière dont il suffira de multiplier un terme par 1,618 pour avoir le suivant soit : 1 ; 1,618 ; 2,618 ; 4,236… ; son symbole phi est la lettre grecque Φ et la suite devient : 1 $\Phi, \Phi^2, \Phi^3, \Phi^4$, Φ5…

à la fraction a/b si a et b sont deux nombres en proportion d'extrême et de moyenne raison. Sa valeur approximative est donc 1,6180339887.

- La valeur du nombre Pi, **π** = 3,14159 est donnée par le rapport (demi-périmètre de la base)/hauteur. On obtient ainsi la valeur approchée 3,14285 !

On retrouve partout le nombre d’Or dans la nature et rien ne prouve que les Egyptiens aient réellement voulu l’intégrer par calcul dans leurs constructions. Une ammonite vieille de 100 millions d’années renferme le nombre d’or ! L’homme, sans le savoir l’utilise depuis 5 000 ans (Dolmen de Goërem). Il y a là donc un mystère, car ce nombre ne sert à rien sinon à donner des proportions esthétiques

D’autre part, d'après les quelques rares documents mathématiques recueillis à ce jour, les Égyptiens de l'Antiquité n'avaient aucune connaissance du nombre π et n'utilisaient que le nombre de substitution 256/81 = 3,1605 pour calculer l'aire d'un disque, méthode de calcul déjà mentionnée notamment dans le Papyrus Rhind datant du Moyen Empire.

Enfin, les papyri mathématiques du Moyen Empire préfigurent les théorèmes de Thalès et de Pythagore…